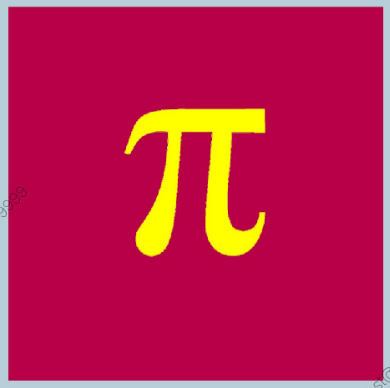
MXM
publishing

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

Ghid complet pentru Evaluarea națională

Autor: Cristian MURICA



- *Definiții. Proprietăți. Reguli și formule esențiale*
- *Explicații intuitive, în limbaj accesibil*
- *Exemple scurte, alese special pentru înțelegere*
- *Notații și terminologie*
- *Atenționări asupra greșelilor frecvente*

București
15 februarie 2026

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDĂ #9999

Drepturi de autor

Cristian MURICA
Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată într-un sistem de recuperare sau transmisă sub orice formă sau prin orice mijloc, electronic, mecanic, prin fotocopiere, înregistrare sau altfel, fără permisiunea prealabilă scrisă a editorului, cu excepția situațiilor permise prin lege.

ISBN: 978-973-738-566-6
Prima ediție: februarie 2026

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Date editoriale și contact:
Editura: www.scoalalematematica.eu
Adresă: strada Vintilă Mihăilescu nr. 14, sector 6, București
www.scoalalematematica.eu
WhatsApp: 0762.469.119.
Email: office@scoalalematematica.eu
YouTube: @scoalalematematica1235
Facebook: https://www.facebook.com/scoalalematematica

Cuprins

Prezentare 9
Mulțimi de numere 11
Mulțimile numerice fundamentale 11
Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 12
Modulul unui număr real 13
Mulțimi și operații cu mulțimi 14
Definiții: 14
Atenționări 15
Operații cu mulțimi 15
Exemple de operații cu mulțimi 15
Inegalități cu modul scrise ca intervale 16
Operații și teoreme în mulțimea numerelor naturale 17
Operații aritmetice de bază și derivate 17
Proprietățile operațiilor matematice în mulțimea numerelor naturale 18
Numere pare și numere impare 18
Teorema împărțirii cu rest 19
Operații cu puteri (reguli de calcul) 19
Pătrate perfecte și cuburi perfecte 20
Ultima cifră a produsului a două numere naturale 20
Ultima cifră a puterii unui număr natural 21
Suma lui Gauss 22
Suma primelor n numere naturale nenule consecutive. 22
Suma numerelor naturale consecutive de la a la b. 22
Numărul termenilor dintr-o sumă de numere naturale consecutive 22
Numărul termenilor dintr-o sumă de numere naturale cu pas constant 23
Scrierea numerelor naturale în baza 10 23
Divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale 24
Definiții. 24
Proprietăți utile (în $\mathbb{N}$) 24
Numere prime și numere compuse 25
Divizori proprii și divizori improprii 25
Numărul divizorilor unui număr natural 25
Mulțimea divizorilor unui număr natural 26
Mulțimea multiplilor unui număr natural 26
Criterii de divizibilitate 26
Cel mai mare divizor comun 27
Mulțimea divizorilor comuni ai două sau mai multor numere 28

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Cel mai mic multiplu comun . . . 28
Mulțimea multipilor comuni ai două sau mai multor numere . . . 30
Legătura dintre C.M.M.D.C. și C.M.M.M.C. . . . 30
Operații în mulțimea numerelor întregi . . . 31
Compararea numerelor întregi . . . 31
Operații aritmetice de bază și derivate . . . 31
Proprietățile operațiilor matematice în mulțimea numerelor întregi . . . 33
Divizibilitatea în mulțimea numerelor întregi . . . 34
Numere raționale. Fracții ordinare . . . 35
Definiții . . . 35
Amplificarea unei fracții ordinare . . . 35
Simplificarea unei fracții ordinare . . . 36
Scoaterea întregilor din fracție . . . 36
Introducerea întregilor în fracție . . . 37
Aducerea la același numitor a fracțiilor ordinare . . . 37
Compararea fracțiilor ordinare . . . 37
Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare . . . 38
Înmulțirea fracțiilor ordinare . . . 39
Puterea cu exponent întreg a unei fracții ordinare . . . 39
Reguli de calcul cu puteri pentru fracții ordinare . . . 40
Ordinea operațiilor . . . 41
Numere raționale. Fracții (numere) zecimale . . . 42
Definiția și scrierea unei fracții (număr) zecimale . . . 42
Clasificarea fracțiilor (numerelor) zecimale . . . 43
Fracție zecimală finită, fracție periodică simplă sau fracție periodică mixtă ? . . . 43
Denumirile zecimalelor (zecimi, sutimi, miimi, . . .) . . . 44
Transformarea fracțiilor (numerelor) zecimale în fracții ordinare . . . 45
Aproximarea prin lipsă a fracțiilor (numerelor) zecimale . . . 46
Aproximarea prin adaos a fracțiilor (numerelor) zecimale . . . 47
Rotunjirea fracțiilor (numerelor) zecimale . . . 48
Adunarea și scăderea a două fracții zecimale finite pozitive . . . 48
Înmulțirea a două fracții zecimale finite pozitive . . . 49
Împărțirea a două fracții zecimale finite pozitive . . . 50
Puterea unei fracții zecimale finite pozitive . . . 50
Adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea fracțiilor zecimale periodice . . . 51
Înmulțirea și împărțirea unei fracții zecimale finite cu 10 și puteri ale lui 10 . . . 51
Rapoarte și proporții . . . 53
Definiții . . . 53
Proporții derivate (transformări utile) . . . 53
Aflarea unei necunoscute dintr-o proporție . . . 54
Șirul de rapoarte egale . . . 55
Titlul unui aliaj . . . 56
Concentrația unei soluții . . . 57
Viteza medie . . . 58
Scara unui desen (a unei hărți) . . . 59
Procente . . . 60

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Definiții . . . 60
Aflarea a $p\%$ dintr-un număr . . . 60
Aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el . . . 61
Calculul raportului procentual p%. Calculul procentului p. . . . 61
Creșteri și scăderi cu $p\%$ . . . 62
Mărimi direct proporționale . . . 63
Definiții . . . 63
Cum obținem dintr-o mulțime de numere o altă mulțime direct proporțională . . . 63
Determinarea coeficientului de proporționalitate . . . 64
Exemple de probleme cu mai multe valori direct proporționale . . . 64
Mărimi invers proporționale . . . 66
Definiții . . . 66
Cum obținem dintr-o mulțime de numere o altă mulțime invers proporțională . . . 66
Determinarea coeficientului de proporționalitate . . . 67
Exemple de probleme cu mai multe valori invers proporționale . . . 67
Regula de 3 simplă . . . 69
Regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale . . . 69
Regula de 3 simplă pentru mărimi invers proporționale . . . 69
Atenționări . . . 70
Probabilități . . . 71
Noțiuni de bază . . . 71
Cum calculăm probabilitatea unui eveniment . . . 71
Probabilitatea a două evenimente succesive . . . 72
Reprezentarea datelor cu ajutorul graficelor, diagramelor și tabelelor . . . 73
Noțiuni de bază . . . 73
Tabele . . . 73
Diagrama cu bare (coloane) . . . 74
Diagrama circulară (diagrama cu sectoare) . . . 75
Graficul liniar (în coordonate) . . . 75
Pași rapizi pentru examen . . . 76
Greșeli frecvente . . . 77
Poligonul frecvențelor (mențiune) . . . 77
Mulțimea numerelor iraționale. Radicali . . . 78
Mulțimea numerelor iraționale . . . 78
Radicali. Rădăcina pătrată . . . 78
Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate. . . . 79
Introducere. . . . 79
De ce este util? . . . 79
Observație. . . . 79
Exemplificare. . . . 79
Cazul în care numărul nu este pătrat perfect (rotunjiri sau aproximări). . . . 81
Aplicarea algoritmului de extragere a rădăcinii pătrate pentru numere zecimale . . . 82
Proprietăți de bază ale radicalilor . . . 83
Scoaterea factorilor de sub radical . . . 84
Introducerea factorilor sub radical . . . 85
Operații cu radicali . . . 85

1) Adunare și scădere. . . . 85
2) Înmulțire. . . . 86
3) Împărțire. . . . 86
4) Puterea cu exponent întreg a unui radical 86
Raționalizarea numitorului unei fracții (forme simple) 87
Compararea numerelor cu radical 89
Încadrarea și aproximarea radicalilor 91
Radicali compuși (radicali dubli) 92
Mulțimea numerelor reale 95
Introducere 95
Intervale = mulțimi de numere reale 96
Operații cu intervale 98
Proprietățile relației de inegalitate în $\mathbb{R}$ 101
Aproximarea și rotunjirea numerelor reale 103
Partea întreagă a unui număr real (aprofundare) 104
Partea fracționară a unui număr real (aprofundare) 105
Modulul unui număr real (aprofundare) 106
Media aritmetică și media geometrică 108
1) Media aritmetică 108
2) Media geometrică (media proporțională) 109
3) Inegalitatea mediilor (pentru două numere pozitive) 109
Ecuații, inecuații și sisteme 111
Ecuații de gradul 1 cu o necunoscută în $\mathbb{R}$ 111
1) Ecuații echivalente 111
2) Domeniul de definiție (condiții de existență) 111
3) Cazuri pentru mulțimea soluțiilor 111
4) Ecuații echivalente (aprofundare). . . . 113
Ecuații cu modul în $\mathbb{R}$ 114
1) Ecuații de forma $|x| = a$ 114
2) Ecuații de forma $|x - a| = b$ 115
3) Ecuații cu modul pe ambele părți 116
4) Folosirea proprietăților modulului (același modul de mai multe ori) 116
5) Ecuații în care un modul este egal cu minus alt modul. . . . 116
6) Ecuații care conduc la ecuații cu modul 117
Ecuații de forma $x^2 = a$ 118
Exemple de ecuații care se rezolvă plecând de la tipul la $x^2 = a$. . . . 119
Sisteme de ecuații 120
Probleme rezolvate cu ecuații sau sisteme de ecuații 123
Inecuții de gradul I cu o necunoscută în $\mathbb{R}$ 125
Transformări care păstrează sensul 125
Rezolvarea inecuației $ax + b \square 0$ 125
Inecuții compuse (duble) 126
Inecuții cu fracții de forma $\dfrac{ax+b}{cx+d} \square 0$ 126
Inecuții cu modul în $\mathbb{R}$ și soluții ca intervale 129
Ecuația de gradul al II-lea 133

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Rădăcinile ecuației de gradul al II-lea. Discriminantul . . . 134
Relațiile lui Viète . . . 136
Scrierea cu rădăcini. . . . 136
Notarea cu S și P a sumei și produsului rădăcinilor. . . . 137
Exemplu 1 (verificare). . . . 137
Exemplu 2 (determinarea ecuației din S și P). . . . 138
Exemplu 3 (determinarea ecuației din rădăcini). . . . 138
Exemplu 4 (determinarea a două numere când se cunosc suma și produsul). 138
Calcul algebric în $\mathbb{R}$ . . . 140
Introducere . . . 140
Adunarea și scăderea termenilor algebrici . . . 140
Înmulțirea termenilor algebrici . . . 141
Împărțirea termenilor algebrici (scrierea ca fracții și simplificarea) . . . 141
Ridicarea la putere . . . 142
Înmulțirea unui termen cu o paranteză . . . 142
Înmulțirea parantezelor . . . 143
Formule de calcul prescurtat . . . 144
Alte formule de calcul prescurtat (în afara programei) . . . 145
Factorul comun . . . 147
Descompunerea în factori . . . 149
Fracții algebrice . . . 152
Expresii algebrice . . . 153
Planul cartezian și ecuația dreptei . . . 156
Sistemul de axe ortogonale. Planul real $\mathbb{R}^2$ . . . 156
Distanța dintre două puncte. Lungimea segmentului . . . 158
Mijlocul unui segment . . . 159
Verificarea coliniarității a trei puncte prin lungimi de segmente . . . 160
Ecuația de gradul I cu două necunoscute . . . 161
Dreapta soluțiilor unei ecuații de gradul I cu două necunoscute . . . 162
Sistem de două ecuații cu două necunoscute. Interpretare geometrică . . . 164
Dependența funcțională . . . 166
Funcții . . . 168
Introducere. Noțiunea de funcție . . . 168
Egalitatea funcțiilor . . . 169
Graficul unei funcții . . . 170
Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții . . . 171
Funcții particulare . . . 172
Funcția de gradul I (funcția liniară) . . . 174
Metoda de reprezentare. . . . 174
Intersecția cu axele de coordonate. . . . 175
Sensul de variație (monotonia). . . . 175
Semnul funcției. . . . 177
Determinarea funcției de gradul I din condiții. . . . 178
Intersecția graficelor a două funcții de gradul I. . . . 178
Paralelism și perpendicularitate (pentru graficele funcțiilor de gradul I). . . . 179
Apartenența unui punct la graficul unei funcții de gradul I. . . . 180

Reprezentarea grafică a funcției de gradul I în cazul în care domeniul de definiție este un interval. 181
Interpretare practică (modele liniare). 183

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Prezentare

Aritmetică și Algebră – Ghid complet pentru Evaluarea Națională este primul volum al unui proiect în două părți, realizat special pentru elevii de gimnaziu care își doresc un material clar, logic și complet pentru recapitulare și fixare.

Împreună cu volumul al doilea, *Geometrie – Ghid complet pentru Evaluarea Națională* (geometrie plană și geometrie în spațiu), lucrarea formează un set unitar, care acoperă întreaga matematică de gimnaziu necesară pentru examen, dar și pentru o pregătire solidă pe parcursul anilor de studiu.

Ce găsești în acest volum?

- definiții, proprietăți, reguli și formule esențiale, scrise concis și ușor de reținut;
- explicații intuitive, în limbaj accesibil, care clarifică ideile importante;
- exemple scurte, alese special pentru înțelegere, fără colecții lungi de exerciții;
- atenționări asupra greșelilor frecvente, care apar des în evaluări și teste;
- notare și terminologie, cu accent pe corectitudine și coerență.

De ce este util? Deși gândit în primul rând pentru Evaluarea Națională, acest ghid este foarte util și pe parcursul gimnaziului: definițiile, teoremele și proprietățile se uită ușor, iar aici sunt adunate la un loc, într-o formă structurată, clară și „prietenoasă”. Este un material potrivit pentru recapitulări rapide, pentru completarea caietului de teorie, dar și pentru învățarea corectă a limbajului matematic.

Pentru cine este această lucrare?

- elevi de gimnaziu care vor o teorie completă și bine organizată;
- elevi care se pregătesc pentru Evaluarea Națională și au nevoie de un „memorator” clar;
- părinți și profesori care doresc un suport de recapitulare și sistematizare.

Structură. Volumul I urmărește progresiv principalele capitole de aritmetică și algebră studiate în gimnaziu, de la noțiuni de bază până la ecuații, inegalități, sisteme, organizarea datelor și funcții, fiecare capitol fiind construit în același stil: definiții – proprietăți – exemple – atenționări.

Împreună, cele două volume oferă un ghid complet, coerent și practic, pentru matematica din gimnaziu și pentru Evaluarea Națională.

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #5678

Proprietățile operațiilor matematice în mulțimea numerelor naturale

Adunarea (în $\mathbb{N}$). Pentru $a, b, c \in \mathbb{N}$:

- **Închidere:** $a + b \in \mathbb{N}$.
- **Comutativitate:** $a + b = b + a$.
- **Asociativitate:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Element neutru:** $a + 0 = 0 + a = a$.
- **Monotonie:** dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$.

Înmulțirea (în $\mathbb{N}$). Pentru $a, b, c \in \mathbb{N}$:

- **Închidere:** $a \cdot b \in \mathbb{N}$.
- **Comutativitate:** $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativitate:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Element neutru:** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **Element absorbant:** $a \cdot 0 = 0$.
- **Monotonie:** dacă $a \leq b$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$ (pentru $c \in \mathbb{N}$).

Distributivitate. Pentru $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{și} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Ex.: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$.

Scăderea (în $\mathbb{N}$). Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, scăderea $a - b$ este definită în $\mathbb{N}$ **doar dacă** $a \geq b$.

- **Nu este comutativă:** $a - b \neq b - a$ (în general).
- **Nu este asociativă:** $(a - b) - c \neq a - (b - c)$ (în general).
- **Atenționare:** $a - 0 = a$, dar $0 - a$ nu este număr natural dacă $a \neq 0$.

Împărțirea (în $\mathbb{N}$). Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, câtul $a : b$ este număr natural **doar dacă** $b \mid a$.

- **Nu este comutativă:** $a : b \neq b : a$ (în general).
- **Nu este asociativă:** $(a : b) : c \neq a : (b : c)$ (în general).
- **Atenționare:** $a : 0$ nu are sens.

Numere pare și numere impare

Definiție. Un număr natural n este **par** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 2k$.

Definiție. Un număr natural n este **impar** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 2k + 1$.

Exemple: $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ sunt pare; $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ sunt impare.

Atenționare: Orice număr natural este **ori par, ori impar** (nu poate fi și par și impar SAU nici par nici impar).

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDĂ #9999

Teorema împărțirii cu rest

Enunț (teorema împărțirii cu rest). Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, cu $b \neq 0$, există două numere naturale **unice**, c și r astfel încât: $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$.

Cum se numesc:

- a – **deîmpărțit**,
- b – **împărțitor**,
- c – **cât**,
- r – **rest**.

$$\mathbf{D = \hat{I} \cdot C + R}, \quad \mathbf{0 \leq R < \hat{I}}.$$

Exemplu: $19 : 3 = 6$, rest 1, se obține: $19 = 3 \cdot 6 + 1$, $0 \leq 1 < 3$.

Împărțirea la zero NU are sens. Deci **împărțitor nenul**: $b \neq 0$.

Restul trebuie să respecte **mereu** condiția: $0 \leq r < \hat{i}$.

De exemplu, dacă împărțitorul este 5, restul poate fi doar $0, 1, 2, 3$ sau 4.

Dacă $r = 0$, atunci spunem că împărțirea este **exactă** și $a = b \cdot c \iff b$ divide a.

Câtul și restul sunt **unice**. Adică nu pot exista două perechi diferite (c, r) care să verifice simultan $a = b \cdot c + r$ și $0 \leq r < b$.

Observație (utilă la unele exerciții): Dacă $a = b \cdot c + r$, atunci: $a - r = b \cdot c$.

Operații cu puteri (reguli de calcul)

În această subsecțiune: baza și exponentul sunt numere naturale ($a, b \in \mathbb{N}$, iar $m, n \in \mathbb{N}$, după caz; când apare împărțirea, presupunem $a \neq 0$ sau $b \neq 0$).

Produs de puteri cu aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **Ex.:** $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

Împărțire (fracție) de puteri cu aceeași bază: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$, cu $a \neq 0$, $m \geq n$

Ex.: $\dfrac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$ $7^4 : 7^2 = 7^{4-2} = 7^2 = 49$

Produs de puteri cu același exponent: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ **Ex.:** $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

Împărțire de puteri cu același exponent: $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $a^m : b^m = (a : b)^m$, cu $b \neq 0$

Ex.: $\dfrac{8^3}{4^3} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^3 = 2^3 = 8$ $18^4 : 9^4 = (18 : 9)2^4 = 2^4 = 16$

Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ **Ex.:** $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

Turnul de puteri (asociere la dreapta): $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ **Ex.:** $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

Cazuri particulare:

$a^0 = 1$, pentru $a \neq 0$ **Ex.:** $5^0 = 1$

$a^1 = a$ **Ex.:** $2^1 = 2$

$1^n = 1$ **Ex.:** $1^6 = 1$

$0^n = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ **Ex.:** $0^7 = 0$

Atenționare: 0^0 **nu are sens**.

Pătrate perfecte și cuburi perfecte

- **Pătrat perfect.** Un număr natural n este **pătrat perfect** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = k^2$. **Exemple:** $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ sunt pătrate perfecte deoarece $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $\ldots$
- **Ultima cifră și pătratele perfecte (criteriu rapid).**
  - Dacă un număr natural are ultima cifră **2, 3, 7 sau 8**, atunci **sigur nu** este pătrat perfect.
  - Dacă un număr natural are ultima cifră **0, 1, 4, 5, 6 sau 9**, atunci **ar putea** fi pătrat perfect, dar **nu este sigur** (trebuie verificat).
- **Cub perfect.** Un număr natural n este **cub perfect** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = k^3$. **Exemple:** $0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots$ sunt cuburi perfecte deoarece $0 = 0^3$, $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, $216 = 6^3$, $\ldots$
- Un număr poate fi și pătrat perfect și cub perfect (ex.: $64 = 8^2 = 4^3$).

Ultima cifră a produsului a două numere naturale

Definiție (ultima cifră). Dacă scriem numărul natural a sub forma

$$a = 10q + x, \qquad \text{unde} \quad q \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

atunci spunem că **ultima cifră a lui** a este x și scriem: $\mathbf{U}(a)$=x

Idee. Ultima cifră a produsului $a \cdot b$ depinde doar de **ultimele cifre** ale lui a și b.

Regulă. Dacă a se termină în cifra x și b se termină în cifra y (adică $x, y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$), atunci ultima cifră a lui $a \cdot b$ este ultima cifră a produsului $x \cdot y$.

Exemple

- Ultima cifră a lui $37 \cdot 58$: ultimele cifre sunt 7 și 8, iar $7 \cdot 8 = 56 \Rightarrow$ ultima cifră este **6**.
- Ultima cifră a lui $124 \cdot 95$: ultimele cifre sunt 4 și 5, iar $4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow$ ultima cifră este **0**.
- Ultima cifră a lui $103 \cdot 217$: ultimele cifre sunt 3 și 7, iar $3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow$ ultima cifră este **1**.

Atenționări

- Dacă unul dintre numere se termină în 0, atunci produsul se termină în 0.
- Dacă unul dintre numere se termină în 5 și celălalt este **par**, atunci produsul se termină în 0 (deoarece $5\cdot$ număr par se termină în 0).

Ultima cifră a puterii unui număr natural

Idee. Ultima cifră a lui a^n depinde doar de **ultima cifră a lui** a și se repetă periodic.

Cazuri simple. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{dacă } a = 0 \Rightarrow a^n \text{ se termină în } 0; \quad \text{dacă } a = 1 \Rightarrow \mathrm{U}\left(a^n\right) = 1;$$

$$\text{dacă } a = 5 \Rightarrow \mathrm{U}\left(5^n\right) = 5; \quad \text{dacă } a = 6 \Rightarrow \mathrm{U}\left(6^n\right) = 6.$$

Cicluri ale ultimei cifre (pentru $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$).

Ultima cifră a lui a	Ultima cifră a lui a^n (se repetă)
2	$2, 4, 8, 6$ (perioadă 4)
3	$3, 9, 7, 1$ (perioadă 4)
4	$4, 6$ (perioadă 2)
7	$7, 9, 3, 1$ (perioadă 4)
8	$8, 4, 2, 6$ (perioadă 4)
9	$9, 1$ (perioadă 2)

Cum folosim ciclul.

- Dacă perioada este 4, folosim restul lui n la împărțirea cu 4.
- Dacă perioada este 2, folosim restul lui n la împărțirea cu 2 (par/impar).

Exemple

- Ultima cifră a lui 7^{23}: ciclul pentru 7 este $7, 9, 3, 1$ (perioadă 4).
  $23 : 4$ are rest 3, deci ultima cifră este a **3-a** din ciclu: **3**.
- Ultima cifră a lui 9^{100}: ciclul pentru 9 este $9, 1$ (perioadă 2).
  Restul împărțirii lui 100 la 2 este zero. Deci ultima cifră este ultima din ciclu: **1**.
- Ultima cifră a lui 312^{15}: U(312^{15})=U(2^{15}).
  Pentru 2 avem $2, 4, 8, 6$ (perioadă de 4); $15 : 4$ rest $3 \Rightarrow$ ultima cifră: **8**.

Atenționare. Dacă restul împărțirii este zero, atunci ultima cifră a puterii date este ultima variantă din ciclu.

Exemplu de calcul a ultimei cifre a unei sume de puteri: Calculați $U(237^{123}+315^{2026})$.

$$U\left(237^{123}\right)=U\left(7^{123}\right), \qquad U\left(315^{2026}\right)=U\left(5^{2026}\right).$$

$$7^n:\ 7,9,3,1 \text{ (perioadă 4)}, \quad 123:4 \text{ rest } 3 \Rightarrow U\left(7^{123}\right)=3.$$
$$U\left(5^{2026}\right)=5.$$

$$U\left(237^{123}+315^{2026}\right)=U\left(U(237^{123})+U(315^{2026})\right)=U\left(U(7^{123})+U(5^{2026})\right)=U(3+5)=U(8)=8.$$

Suma lui Gauss

Suma primelor n numere naturale nenule consecutive.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ex.: $1+2+\cdots+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55.$

Suma numerelor naturale consecutive de la a la b.

Pentru $a,b\in\mathbb{N}$, $a\leq b$:

$$a+(a+1)+\cdots+b=\frac{(b-a+1)(a+b)}{2}.$$

Ex.: $7+8+\cdots+20=\frac{(20-7+1)(7+20)}{2}=\frac{14\cdot 27}{2}=189.$

Atenționare. Formula se aplică doar pentru **numere consecutive** (diferența este 1 între termeni).

Numărul termenilor dintr-o sumă de numere naturale consecutive

De la a la b (cu pas 1). Dacă $a,b\in\mathbb{N}$ și $a\leq b$, atunci în suma

$$a+(a+1)+\cdots+b$$

numărul termenilor este:

$$n=b-a+1.$$

Ex.: $7+8+\cdots+20$ are $n=20-7+1=14$ termeni.

Atenționare. Formula $n=b-a+1$ este valabilă doar pentru **numere consecutive** (adică diferența dintre termeni este 1).

Exemplu. Multiplii lui 12 sunt $0, 12, 24, 36, 48, \ldots$, iar ai lui 18 sunt $0, 18, 36, 54, \ldots$, deci

$$[12, 18] = 36.$$

Determinarea celui mai mic multiplu comun utilizând descompunerea în factori primi.

Determinarea celui mai mic multiplu comun utilizând descompunerea în factori primi.

- **Etapa 1:** se descompun numerele date în factori primi.
- **Etapa 2:** se aleg **toate** numerele prime care apar în **cel puțin una** dintre descompuneri (factorii primi care apar în descompuneri).
- **Etapa 3:** Se calculează **C.M.M.M.C.** înmulțind **toți** acești factori primi, luați o singură dată, la **puterea cea mai mare** pe care au avut-o în descompunerile numerelor date.

Exemplu:

$$m = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad n = 420 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7.$$

Factorii primi care apar în descompuneri sunt $2, 3, 5, 7$, deci:

$$[m, n] = 2^{\max(3,2)} \cdot 3^{\max(2,1)} \cdot 5^{\max(1,1)} \cdot 7^{\max(0,1)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520.$$

Atenționări:

- se folosesc **toți** factorii primi care apar în cel puțin una dintre descompuneri, iar fiecare se ia **o singură dată**, la **puterea cea mai mare**.
- Dacă unul dintre numere este multiplu al celuilalt, atunci C.M.M.M.C. este numărul mai mare.
- C.M.M.M.C. este un **număr nenul** (de aceea, în definiție lucrăm cu $a, b \in \mathbb{N}^*$).
- C.M.M.M.C. al lui a și b este **cel mai mic** număr natural nenul care este multiplu **al amândurora**, nu „un multiplu comun oarecare”.

Proprietăți utile.

$[a, b] = [b, a]$.

$[a, 1] = a$ pentru $a \in \mathbb{N}^*$.

$[a, a] = a$ pentru $a \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a \mid b$, atunci $[a, b] = b$.

Legătura cu C.M.M.D.C.: $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ (pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$: $[ka, kb] = k\,[a, b]$.

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Mulțimea multipilor comuni ai două sau mai multor numere

Definiție. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$. Un număr $m \in \mathbb{N}$ se numește **multiplu comun** al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dacă:

$$a_1 \mid m,\ a_2 \mid m,\ \ldots,\ a_n \mid m.$$

Mulțimea tuturor multipilor comuni se notează:

$$M_c(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Proprietate esențială.

Dacă L este cel mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$

atunci **mulțimea multiplilor comuni** este **mulțimea multiplilor lui** L.

Adică, dacă $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = L$, **atunci** $M_c(a_1, a_2, \ldots, a_n) = M_L$.

Cu alte cuvinte, pentru a găsi toți multiplii comuni, calculăm mai întâi cmmmc și apoi scriem multiplii lui cmmmc.

Exemplu scurt.

Pentru 4 și 6 avem $[4, 6] = 12$, deci

$$M_c(4, 6) = M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, \ldots\}.$$

Pentru 3, 5 și 6:

$$[3, 5, 6] = 30; \quad M_c(3, 5, 6) = \{0, 30, 60, 90, 120, \ldots\}.$$

Legătura dintre C.M.M.D.C. și C.M.M.M.C.

Relația fundamentală (pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$):

$$\boxed{a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b].}$$

Consecință:

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} \qquad \text{și} \qquad (a, b) = \frac{a \cdot b}{[a, b]}.$$

Exemplu: pentru $a = 24$ și $b = 60$ avem $(24, 60) = 12$, deci

$$[24, 60] = \frac{24 \cdot 60}{12} = 120.$$

Atenționare: formulele se folosesc doar pentru $a, b \neq 0$ (adică $a, b \in \mathbb{N}^*$).

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Scara unui desen (a unei hărți)

Definiție. Scara unui desen (sau a unei hărți) arată de câte ori este **micșorată** sau **mărită** realitatea. Scara se notează, de obicei, sub forma:

$$1 : n \quad \text{sau} \quad 1/n,$$

și se citește „*unu la* n”.

Interpretare.

La scara $1 : n$, **1 unitate** pe desen corespunde la n **unități** în realitate.

Scara $1 : n$ (cu $n > 1$) este o **micșorare**.

Scara $n : 1$ (cu $n > 1$) este o **mărire** (folosită frecvent la desene tehnice).

Formule. Notăm:

L_d = lungimea pe desen / pe hartă,

L_r = lungimea reală,

scara $1 : n$ (cu $n \neq 0$).

Atunci:

$$\frac{L_d}{L_r} = \frac{1}{n} \iff L_d = \frac{L_r}{n} \iff L_r = n \cdot L_d.$$

Exemple scurte.

Pe o hartă cu scara $1 : 100000$, $1\,\text{cm}$ reprezintă $100000\,\text{cm} = 1\,\text{km}$ în realitate.

La scara $1 : 50000$, un segment de $4\,\text{cm}$ pe hartă reprezintă:

$$L_r = 50000 \cdot 4\,\text{cm} = 200000\,\text{cm} = 2\,\text{km}.$$

La scara $1 : 200$, o lungime reală de $6\,\text{m} = 600\,\text{cm}$ se desenează cu:

$$L_d = \frac{600}{200} = 3\,\text{cm}.$$

Atenționări.

În calcule, L_d și L_r trebuie exprimate în **aceleași unități** (de exemplu, ambele în cm).

La hărți, valorile lui n sunt de obicei mari; este utilă conversia:

$$100000\,\text{cm} = 1\,\text{km}, \qquad 1000\,\text{m} = 1\,\text{km}.$$

Procente

Definiții

Raport procentual. Un raport de forma

$$\frac{a}{100}$$

se numește **raport procentual**. Numărul a arată câte „părți din 100” luăm.

Procent. Când scriem $p\%$, numărul p se numește **procent**.

Un procent înseamnă **o sutime**:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

În general:

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

Interpretare. A spune „$p\%$ dintr-o mărime” înseamnă „**raportul procentual** $\frac{p}{100}$ din acea mărime”.

Exemple scurte.

$25\% = \frac{25}{100} = 0,25.$

$7,5\% = \frac{7,5}{100} = 0,075.$

$120\% = \frac{120}{100} = 1,2.$

Atenționare.

În probleme, trebuie precizat mereu **întregul (baza)**: „$p\%$ **din ce / din cât** se calculează?”.

În calcule, este util să înlocuiești $p\%$ cu $\frac{p}{100}$ sau, uneori, cu srierea sub formă de fracție zecimală.

Aflarea a $p\%$ dintr-un număr

Regulă. Dacă A este un număr, atunci:

$$p\% \text{ din } A = \frac{p}{100} \cdot A.$$

Exemple scurte.

15% din 200:

$$\frac{15}{100} \cdot 200 = 30.$$

$7,5\%$ din 80:

$$0,075 \cdot 80 = 6.$$

20% din (-50):

$$\frac{20}{100} \cdot (-50) = -10.$$

Aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el

Regulă. Dacă $p\%$ (cu $p \neq 0$) din numărul A este egal cu B, adică

$$\frac{p}{100} \cdot A = B,$$

atunci, scriem ca proporție și aplicăm „produsul mezilor = produsul extremilor”:

$$\frac{p \cdot A}{100} = \frac{B}{1} \implies p \cdot A = 100 \cdot B \implies A = \frac{100 \cdot B}{p}.$$

Exemple scurte.

Dacă 25% din A este 50, atunci:

$$A = \frac{50 \cdot 100}{25} = 200.$$

Dacă $12,5\%$ din A este 30, atunci:

$$A = \frac{30}{0,125} = 240.$$

Atenționare.

În această situație, p trebuie să fie **nenul** (nu are sens „0% din A” pentru a determina A).

Calculul raportului procentual p%. Calculul procentului p.

Definiție. Raportul procentual (p% sau $\frac{p}{100}$) arată **cât la sută reprezintă** numărul a din numărul b ($b \neq 0$):

$$a = p\% \text{ din b.}$$

Se citește „*a reprezintă $p\%$ din b*”.

Putem scrie:

$$a = p\% \text{ din b} \quad \Rightarrow a = \frac{p}{100} \cdot b \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{p \cdot b}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p\% = \frac{a}{b} \text{ sau } p = \frac{a}{b} \cdot 100$$

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Exemple scurte.

30 din 200:

$$p = \frac{30}{200} \cdot 100 = 15 \Rightarrow 30 \text{ reprezintă } 15\% \text{ din } 200.$$

18 din 24:

$$p = \frac{18}{24} \cdot 100 = 75 \Rightarrow 18 \text{ reprezintă } 75\% \text{ din } 24.$$

Atenționare.

Baza este b (numărul „din care” se calculează procentul), deci trebuie să fie $b \neq 0$.

Creșteri și scăderi cu $p\%$

Idee. O creștere/scădere procentuală se face raportându-ne la **valoarea inițială**.

Formule. Dacă valoarea inițială este A, atunci:

Creștere cu $p\%$:

$$A_{\text{nou}} = A + \frac{p}{100}A = A\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Scădere cu $p\%$:

$$A_{\text{nou}} = A - \frac{p}{100}A = A\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Exemple scurte.

Preț 200 lei, crește cu 15%:

$$200\left(1 + \frac{15}{100}\right) = 200 \cdot (1 + 0,15) = 200 \cdot 1,15 = 230 \text{ lei}.$$

Cantitate 80 kg, scade cu 25%:

$$80\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 80 \cdot (1 - 0,25) = 80 \cdot 0,75 = 60 \text{ kg}.$$

Atenționare.

O creștere cu $p\%$ urmată de o scădere cu același $p\%$ **nu** are ca rezultat valoarea inițială, deoarece baza de calcul se schimbă.

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDĂ #9999

pe axa orizontală este, de obicei, **timpul** (ziua, ora);

pe axa verticală este **valoarea** (grade, km, lei etc.);

punctele unite arată evoluția.

Exemplu (temperatura într-o săptămână). Temperaturile (în °C) în 7 zile sunt:

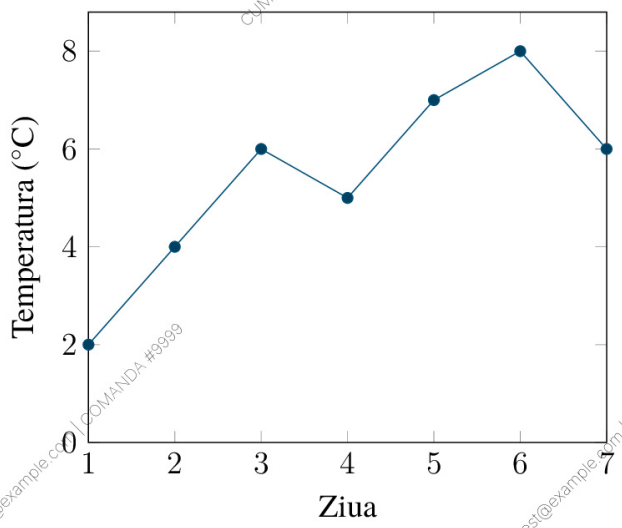
$$(1,2),\ (2,4),\ (3,6),\ (4,5),\ (5,7),\ (6,8),\ (7,6).$$

ziua cu temperatura maximă este ziua 6 (8°C);

creșterea de la ziua 1 la ziua 3 este: $6-2=4$°C;

scăderea de la ziua 6 la ziua 7 este: $8-6=2$°C.

Grafic liniar.



Atenționare.

Nu confunda **valoarea** cu **diferența** dintre două valori consecutive.

Pași rapizi pentru examen

Citește titlul și **unitățile** (lei, elevi, kg, km, % etc.).

Identifică **totalul** T (dacă este nevoie).

Citește corect valorile din tabel/diagramă/grafic.

Fă operația cerută: **suma**, **diferența** sau **procentul**.

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDĂ #9999

Pasul 4. Prin încercări succesive găsim $x = 3$ și astfel $243 \times 3 = 729$.
Scriem cifra 3 la rezultat.
Scriem 729 sub 827, efectuăm scăderea și obținem 98.
Coborâm ultima grupă (56) și obținem numărul 9856.
Dublăm rezultatul ($123 \times 2 = 246$) și îl scriem în dreapta jos, sub $243 \cdot 3 = 729$.
Căutăm cifra x astfel încât $\overline{246x} \cdot x$ să fie cel mai mare număr mai mic sau egal decât 9856.
Încercăm $2464 \times 4 = 9856$. Calculul se încheie exact.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1\ \underbrace{52}\ \underbrace{27}\ \underbrace{56}} & 123 \\
\hline
 & 1 \cdot 1 = 1 \\
\hline
\underline{1} & \\
= 52 & 22 \cdot 2 = 44 \\
\underline{44} & \\
= 827 & 243 \cdot 3 = 729 \\
\underline{729} & \\
= 9856 & 246\underline{x} \ \cdot \ \underline{x} = \\
\hline
 &
\end{array}
$$

Pasul 5. Prin încercări succesive găsim găsim $x = 4$ și astfel $2464 \times 4 = 9856$.
Completăm rezultatul cu cifra 4 (dreapta sus). Scădem 9856 din 9856 și obținem 0.
Astfel, calculul se încheie exact.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1\ \underbrace{52}\ \underbrace{27}\ \underbrace{56}} & 1234 \\
\hline
 & 1 \cdot 1 = 1 \\
\hline
\underline{1} & \\
= 52 & 22 \cdot 2 = 44 \\
\underline{44} & \\
= 827 & 243 \cdot 3 = 729 \\
\underline{729} & \\
= 9856 & 2464 \cdot 4 = 9856 \\
\underline{9856} & \\
=== & \\
 &
\end{array}
$$

Concluzie.

$$\sqrt{1522756} = 1234.$$

Cazul în care numărul nu este pătrat perfect (rotunjiri sau aproximări).

Dacă numărul n **nu este pătrat perfect**, atunci:

Cazul 2. $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$, $b \neq 0$ și $c > 0$, se amplifică fracția cu partea irațională a numitorului

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}.$$

Exemplu.

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Cazul 3. $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ Se amplifică fracția cu **conjugata** $a-\sqrt{b}$:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

Exemple:

$$\frac{2}{3+\sqrt{2}} = \frac{2(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{2(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{2(3-\sqrt{2})}{7}.$$

$$\frac{2}{5+3\sqrt{2}} = \frac{2(5-3\sqrt{2})}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \frac{2(5-3\sqrt{2})}{5^2-(3\sqrt{2})^2} = \frac{2(5-3\sqrt{2})}{25-18} = \frac{2(5-3\sqrt{2})}{7}.$$

Cazul 4. $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}$ Se amplifică fracția cu **conjugata** $a+\sqrt{b}$:

$$\frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

Exemple:

$$\frac{3}{5-\sqrt{3}} = \frac{3(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \frac{3(5+\sqrt{3})}{25-3} = \frac{3(5+\sqrt{3})}{22}.$$

$$\frac{33}{7-3\sqrt{3}} = \frac{33(7+3\sqrt{3})}{(7-3\sqrt{3})(7+3\sqrt{3})} = \frac{33(7+3\sqrt{3})}{7^2-(3\sqrt{3})^2} = \frac{33(7+3\sqrt{3})}{49-27} = \frac{3(7+3\sqrt{3})}{2}.$$

Atenționare. În cazurile 3 și 4, după amplificarea cu conjugata, la numitor apare întotdeauna **diferența pătratelor**:

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b,$$

deci între termeni rezultați la numitor în urma amplificării fracției cu conjugata vom avea întotdeauna semnul MINUS.

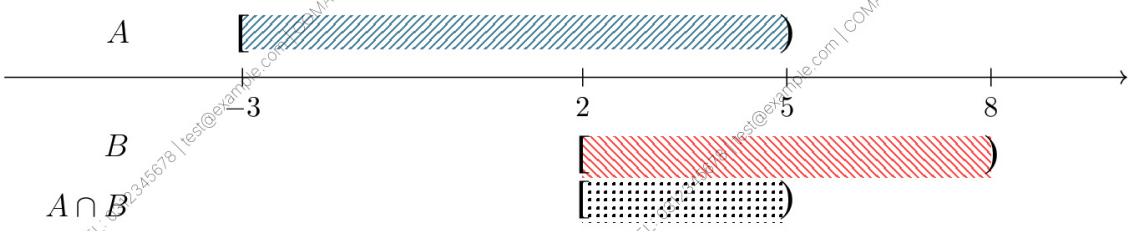
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999

Se citește: „A *intersectat cu* B”.

Exemplu 1 (există parte comună).

$$A = [-3, 5), \quad B = [2, 8)$$

$$A \cap B = [2, 5).$$



Exemplu 2 (nu există parte comună).

$$A = (-5, -2], \quad B = (1, 4)$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

Regulă practică. La intersecție rămâne doar **partea comună** a celor două intervale.

3) Diferența intervalelor

Definiție. Diferența $A \setminus B$ este mulțimea numerelor care sunt în A, dar **nu** sunt în B:

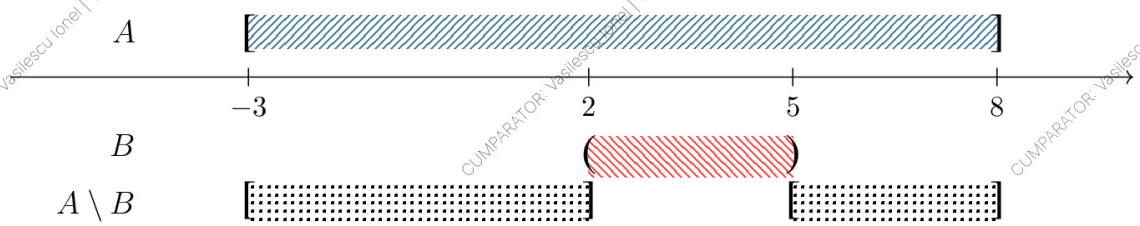
$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Se citește: „A *fără* B”.

Exemplu 1 (se elimină o parte din interior).

$$A = [-3, 8], \quad B = (2, 5)$$

$$A \setminus B = [-3, 2] \cup [5, 8].$$



Exemplu 2 (se elimină un capăt).

$$A = [-3, 5), \quad B = [-3, -1]$$

$$A \setminus B = (-1, 5).$$

rotunjire (la unități, zecimi, sutimi, miimi etc.).

Trimitere. Regulile și exemplele pentru:

Aproximarea prin lipsă a fracțiilor (numerelor) zecimale;

Aproximarea prin adaos a fracțiilor (numerelor) zecimale;

Rotunjirea fracțiilor (numerelor) zecimale

sunt aceleași și pentru numere reale; ele au fost prezentate în secțiunea **Numere raționale. Fracții (numere) zecimale**.

Partea întreagă a unui număr real (aprofundare)

Definiție. Pentru orice număr real x, **partea întreagă** a lui x este cel mai mare număr întreg **mai mic sau egal** cu x. Se notează:

$$[x].$$

Deci:

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Interpretare pe axă. $[x]$ este întregul la care ajungem dacă „coborâm” din x la stânga până la cel mai apropiat întreg. Dacă x este un număr întreg, atunci partea întreagă a lui x este chiar numărul x.

Exemple.

$[3,2] = 3$.

$[5] = 5$.

$[-1,7] = -2$ (deoarece $-2 \leq -1,7 < -1$).

$\left[\sqrt{20}\right] = 4$ (deoarece $4 < \sqrt{20} < 5$).

Proprietăți.

Încadrare. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ este **unicul** număr întreg care satisface:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Numere întregi.

$$[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}.$$

Adunarea cu un întreg. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$[x + n] = [x] + n.$$

Suma cu opusul.

$$|x| \leq 0 \iff x = 0.$$

2) Inecuții de forma $|x| > a$ și $|x| \geq a$

Regulă. Pentru $a \geq 0$:

$$|x| > a \iff x < -a \text{ sau } x > a \iff x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty),$$

$$|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ sau } x \geq a \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty).$$

Caz special. Dacă $a < 0$, atunci $|x| > a$ este adevărat pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci:

$$S = \mathbb{R}.$$

Exemplu.

$$|x| > 2 \iff x < -2 \text{ sau } x > 2 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

3) Inecuții de forma $|x - a| < b$, $|x - a| \leq b$, $|x - a| > b$, $|x - a| \geq b$

Regulă. Pentru $b > 0$:

$$|x - a| < b \iff a - b < x < a + b \iff x \in (a - b, a + b),$$

$$|x - a| \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b \iff x \in [a - b, a + b],$$

$$|x - a| > b \iff x < a - b \text{ sau } x > a + b \iff x \in (-\infty, a - b) \cup (a + b, +\infty),$$

$$|x - a| \geq b \iff x \leq a - b \text{ sau } x \geq a + b \iff x \in (-\infty, a - b] \cup [a + b, +\infty).$$

Caz special. Dacă $b < 0$, atunci $|x - a| \leq b$ și $|x - a| < b$ sunt imposibile:

$$S = \varnothing.$$

Dacă $b = 0$, atunci:

$$|x - a| \leq 0 \iff x = a.$$

Exemplu.

$$|x - 2| \leq 3 \iff -3 \leq x - 2 \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5 \iff x \in [-1, 5].$$

4) Inecuții de forma $|A(x)| \leq c$ (metodă prin cazuri)

Dacă $c \geq 0$, atunci:

$$|A(x)| \leq c \iff -c \leq A(x) \leq c.$$

Dacă $c < 0$, atunci

$$|A(x)| \leq c \text{este imposibil:} \Longrightarrow S = \varnothing.$$

Exemplu.

$$|2x - 1| < 5 \iff -5 < 2x - 1 < 5 \iff -4 < 2x < 6 \iff -2 < x < 3 \iff x \in (-2, 3).$$

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDĂ #6939

Deci, în forma monică, ecuația devine:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Compararea coeficienților. Avem două forme ale aceleiași ecuații:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{și} \qquad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Egalăm coeficienții lui x și termenii liberi:

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Relațiile lui Viète.

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \text{și} \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}.$$

Notarea cu S și P a sumei și produsului rădăcinilor.

Se notează adesea:

$$S = x_1 + x_2, \qquad P = x_1x_2.$$

Atunci relațiile lui Viète devin:

$$S = -\frac{b}{a}, \qquad P = \frac{c}{a},$$

iar ecuația se poate scrie:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0.}$$

Observație. Forma $x^2 - Sx + P = 0$ este foarte utilă atunci când lucrăm direct cu suma și produsul rădăcinilor, fără a calcula explicit x_1 și x_2.

Exemplu 1 (verificare).

Pentru ecuația:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

avem $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$, deci:

$$S = -\frac{b}{a} = 5, \qquad P = \frac{c}{a} = 6.$$

Se calculează rădăcinile ecuației și se obține $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$. Observăm că acestea verifică S și P:

$$S = 2 + 3 = 5, \qquad P = 2 \cdot 3 = 6.$$

Exemplu 2 (determinarea ecuației din S și P).

Să se scrie ecuația de gradul al II-lea (monică) care are

$$S = -3, \qquad P = -4.$$

Atunci:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Longrightarrow x^2 - (-3)x + (-4) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Exemplu 3 (determinarea ecuației din rădăcini).

Să se scrie ecuația de gradul al II-lea cu $a = 1$ care are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = -4$.

$$S = x_1 + x_2 = 1 + (-4) = -3, \qquad P = x_1 x_2 = 1 \cdot (-4) = -4.$$

Deci:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Longrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Exemplu 4 (determinarea a două numere când se cunosc suma și produsul).

Să se determine două numere reale a și b, cu $a > b$, știind că suma lor este egală cu $2\sqrt{3}$ și produsul egal cu 1.

Vom considera că cele două numere (a și b) sunt rădăcinile x_1 și x_2 ale unei ecuații de gradul al doilea (cu necunoscuta x):

$$S = x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}, \qquad P = x_1 x_2 = 1.$$

Formăm ecuația de gradul al II-lea în funcție de S și P:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0.$$

Calculăm discriminantul:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 - 4 = 8.$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Rădăcinile ecuației sunt:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \qquad x_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Răspuns: numerele căutate sunt

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \text{și} \quad b = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

(într-adevăr, suma lor este $2\sqrt{3}$, iar produsul este 1)

Atenționare.

Factorul comun

Idee. Când mai mulți termeni au „ceva în comun” (un număr, o literă sau o expresie), putem **scoate factorul comun** în fața parantezei. Această transformare se numește **descompunere în factori** și se bazează pe distributivitate:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Cum determinăm factorul comun.

La coeficienți alegem cel mai mare divizor comun (pentru numere).

La litere alegem puterea cea mai mică care apare acea literă în toți termenii.

Dacă o expresie apare identic în mai mulți termeni, ea poate fi factor comun.

Exemplul 1 (factor comun numeric).

$$6x + 9 = 3(2x + 3).$$

Aici factorul comun este 3.

Exemplul 2 (factor comun numeric și literal).

$$5x^2 - 10x = 5x(x - 2).$$

Factor comun: $5x$.

Exemplul 3 (coeficienți negativi).

$$-4x + 12 = -4(x - 3).$$

Factor comun: -4 (este util să scoatem factorul comun negativ pentru a obține o paranteză mai simplă).

Exemplul 4 (două variabile).

$$12a^2b + 18ab^2 = 6ab(2a + 3b).$$

Factor comun: $6ab$.

Exemplul 5 (factor comun o expresie).

$$(x - 1)(2x + 3) - (x - 1)(x - 5) = (x - 1)\Big[(2x + 3) - (x - 5)\Big].$$

Continuăm:

$$(x - 1)\Big[(2x + 3) - (x - 5)\Big] = (x - 1)(2x + 3 - x + 5) = (x - 1)(x + 8).$$

Exemplul 6.

$$15a^4b^2 - 10a^2b^5 = 5a^2b^2(3a^2 - 2b^3).$$

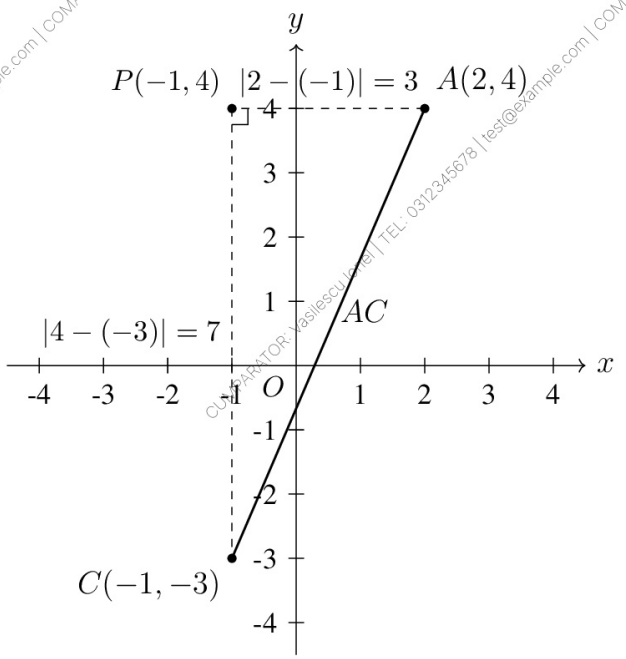
Factor comun: $5a^2b^2$ (puterea cea mai mică la a este 2, iar la b este 2).

Reprezentare (exemplu cu puncte în cadrane diferite).

Considerăm punctele:

$$A(2,4) \quad \text{și} \quad C(-1,-3).$$

Construim punctul auxiliar $P(-1,4)$ (același x ca la C și același y ca la A), pentru a evidenția diferențele pe axe.



În acest exemplu:

$$AC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}.$$

Mijlocul unui segment

Definiție. Punctul M se numește **mijlocul segmentului** $[AB]$ dacă:

$M \in [AB]$;

$AM = MB$.

Formula mijlocului. Dacă

$$A(x_1,y_1) \quad \text{și} \quad B(x_2,y_2),$$

atunci mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Determinarea funcției de gradul I din condiții.

1) Din două puncte ale reprezentării grafice. Dacă știm că reprezentarea grafică trece prin $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ cu $x_1 \neq x_2$, (sau că cele două perechi de numere aparțin graficului funcției) atunci există o unică funcție de gradul I $f(x) = ax + b$ care verifică:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

de unde se determină a și b.

Exemplu. Reprezentarea grafică (dreapta) trece prin $A(0, 2)$ și $B(3, 8)$.

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 2 \\ 3a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 3a + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2.$$

Deci:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 2.$$

2) Dintr-o rădăcină și o valoare. Dacă știm că $f(x_0) = 0$ și $f(x_1) = y_1$, atunci:

$$ax_0 + b = 0, \qquad ax_1 + b = y_1,$$

și determinăm a și b.

Intersecția graficelor a două funcții de gradul I.

Fie două funcții de gradul I:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a_1 x + b_1, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = a_2 x + b_2.$$

Punctul (sau punctele) comune celor două grafice se obțin rezolvând ecuația:

$$f(x) = g(x).$$

Adică:

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2.$$

Rezolvăm această ecuație pentru a afla abscisa x_0 a punctului de intersecție, apoi calculăm ordonata:

$$y_0 = f(x_0) \quad (\text{sau } y_0 = g(x_0)).$$

Deci punctul de intersecție este:

$$P(x_0, y_0).$$

Observație.

Dacă $a_1 \neq a_2$, ecuația are o singură soluție, deci graficele se intersectează într-un singur punct.

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0312345678 | test@example.com | COMANDA #9999