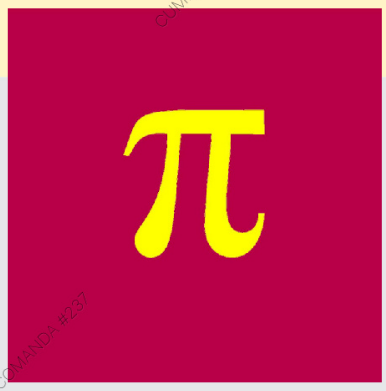
MXM School & Publishing Ltd.

Suma lui Gauss

Ediția I

Autor: Cristian MURICA



- *Cum a învins un copil geniu o problemă plictisitoare*
- *Exerciții Rezolvate – Suma lui Gauss în Acțiune*
- *Aplicații practice*
- *Exerciții propuse pentru rezolvare*
- *Rezultatele exercițiilor propuse*

București
6 decembrie 2025

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

Drepturi de autor

Cristian MURICA
Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată într-un sistem de recuperare sau transmisă sub orice formă sau prin orice mijloc, electronic, mecanic, prin fotocopiere, înregistrare sau altfel, fără permisiunea prealabilă scrisă a editorului, cu excepția situațiilor permise prin lege.

ISBN: 978-973-738-562-8
Prima ediție: decembrie 2025

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

Date editoriale și contact:
Editura: MXM School & Publishing Ltd.
Adresă: strada Vintilă Mihăilescu nr. 14, sector 6, București
Email: office@scoalademateматica.eu

Cuprins

1 Cum a învins un copil geniu o problemă plictisitoare **5**
- 1.1 Cum a început povestea...? . . . 7
- 1.2 Problema: De la plictiseală la provocare . . . 9
  - 1.2.1 Enunțul problemei . . . 9
  - 1.2.2 De ce este dificil? . . . 9
  - 1.2.3 Provocare pentru tine . . . 9
  - 1.2.4 Cum a abordat Gauss problema? . . . 9
- 1.3 Soluția ingenioasă a lui Gauss . . . 10
  - 1.3.1 Ideea genială . . . 10
  - 1.3.2 Pașii soluției . . . 10
  - 1.3.3 Ilustrație grafică . . . 10
- 1.4 Generalizarea: De la caz particular la formulă . . . 11
  - 1.4.1 De la 100 la ... n . . . 11
  - 1.4.2 Aplicăm aceeași metodă . . . 11
  - 1.4.3 Verificarea formulei . . . 11
  - 1.4.4 Perspectiva istorică și modul de gândire . . . 11

2 Exerciții Rezolvate - Suma lui Gauss în Acțiune **13**
- 2.1 Sume de numere consecutive . . . 15
  - 2.1.1 Suma de la 1 la n (aplicare directă) . . . 15
  - 2.1.2 Suma de la k la n (secvențe parțiale) . . . 17
  - 2.1.3 Găsirea lui n când se cunoaște suma . . . 19
- 2.2 Sume de numere în progresie aritmetică . . . 22
  - 2.2.1 Sume de numere pare/impare . . . 22
  - 2.2.2 Sume de numere care cresc cu același pas (aceeași rație) . . . 24
- 2.3 Aplicații practice . . . 29
- 2.4 Exerciții derivate din elementare . . . 33

3 Exerciții propuse pentru exersare și antrenament **39**
- 3.1 Sume de numere consecutive . . . 41
  - 3.1.1 Suma de la 1 la n (aplicare directă) . . . 41
  - 3.1.2 Suma de la k la n (secvențe parțiale) . . . 41
  - 3.1.3 Găsirea lui n când se cunoaște suma . . . 42
  - 3.1.4 Rezultate pentru secțiunea "Sume de numere consecutive" . . . 42
- 3.2 Sume de numere în progresie aritmetică . . . 44
  - 3.2.1 Sume de numere pare/impare . . . 44
  - 3.2.2 Sume de numere care cresc cu același pas (aceeași rație) . . . 44

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

3.2.3 Rezultate pentru secțiunea "Sume de numere în progresie aritmetică" 45
3.3 Aplicații practice 48
3.3.1 Probleme propuse 48
3.3.2 Rezultate pentru problemele propuse 48
3.4 Exerciții derivate din elementare 50
3.4.1 Exerciții propuse 50
3.4.2 Rezultate pentru exercițiile propuse 51

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

CAPITOLUL 1

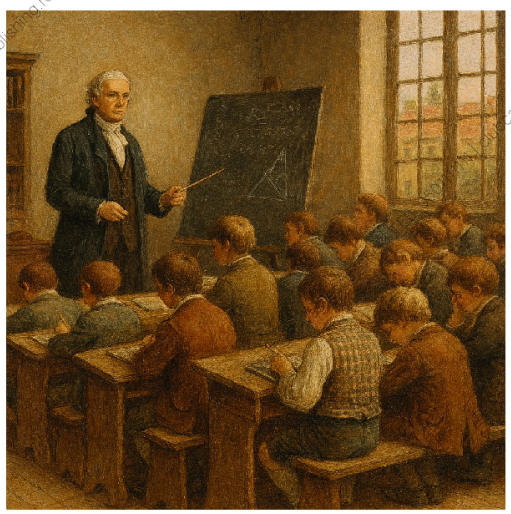
Cum a învins un copil geniu o problemă plictisitoare

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | c
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237
CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | c

1.1 Cum a început povestea...?

În anul 1784, într-o mică şcoală din Braunschweig, Germania, un profesor punea la încercare răbdarea elevilor săi. Ca să-i ocupe pe cei mici cu ceva pentru o vreme, să aibă și el o clipă de linişte, le-a dat o sarcină aparent simplă, dar anevoioasă: să calculeze suma primelor o sută de numere.



O sală de clasă din secolul al XVIII-lea

„Aveţi de calculat," a spus probabil profesorul, „cât este 1 + 2 + 3 + 4, şi aşa mai departe, până la 100. Şi să nu vă mişcaţi până nu găsiţi rezultatul corect!"

Imaginaţi-vă scena: băieţi şi fete aşezaţi în bănci, cu condeiele în mână, începând să adune, unul câte unul, cu concentrare şi oarecare plictiseală. 1+2=3, 3+3=6, 6+4=10... Un mormăit de cifre umplea sala, iar calculele se îngrămădeau pe coli de hârtie.

Dar, în mijlocul acestui maraton de aritmetică, un băieţel de doar opt sau nouă ani, pe nume Carl Friedrich Gauss, a privit problema cu ochi diferiţi. El nu a văzut un şir lung şi obositor de numere, ci un model, o simetrie. În loc să se apuce să adune în ordine, a făcut ceva revoluţionar. A găsit o cale ocolitoare, o scurtătură a minţii.

În doar câteva clipe, în timp ce colegii lui abia începeau să se apropie de numărul 20, Carl Friedrich şi-a pus creionul jos.

„Rezultatul este 5050," a spus el cu calm.

Privirile uimite ale profesorului şi ale colegilor lui s-au îndreptat spre el. Cum era posibil? Nu putea fi doar noroc...

Băiatul nu doar că avea dreptate, ci găsise cea mai elegantă şi rapidă metodă de a rezolva problema.



Carl Friedrich Gauss - copil

Cum a făcut asta?
Care a fost scurtătura genială pe care a descoperit-o copilul care avea să devină unul dintre cei mai mari matematicieni ai lumii, supranumit „Prinţul Matematicienilor”?

În acest capitol, vom păşi exact în urmele lui Gauss. Vom lăsa deoparte adunarea mecanică şi vom descoperi împreună magia din spatele acestei poveşti. Vei învăța un instrument matematic puternic, care transformă o problemă care ar putea pune în încurcătură pe oricine într-un exercițiu de logică simplu și elegant.

Ești pregătit să-i provoci pe toți prietenii tăi cu o astfel de problemă și apoi să le spui, ca un adevărat magician, soluția în câteva secunde?

Hai să începem!

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

2.1.3 Găsirea lui n când se cunoaște suma

Exercițiul 2.1.7

Determinați n știind că $1+2+3+\ldots+n=210$.

Rezolvare:
Metoda 1: Pentru clasele 5-7 (fără ecuație de gradul II)
Știm că $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=210$
Atunci $n(n+1)=420$
Căutăm două numere consecutive al căror produs este 420.
Indicație: căutăm un număr natural care, ridicat la puterea a doua, să ne dea un rezultat cât mai apropiat de 420.
Observăm că $20^2=400$
Gândim că n poate fi 20 și (n+1)=20+1=21.
Efectuăm calculul și obținem:
$20\times 21=420$, deci $n=20$.

Metoda 2: Cu ecuație de gradul II (pentru clasele 8+)

$$\frac{n(n+1)}{2}=210$$
$$n(n+1)=420$$
$$n^2+n-420=0$$

Rezolvăm ecuația de gradul II:

$$\Delta=1^2-4\times 1\times(-420)=1+1680=1681$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1681}=41$$
$$n=\frac{-1+41}{2}=\frac{40}{2}=20$$

Verificare: $1+2+\ldots+20=\frac{20\times 21}{2}=210$

Exercițiul 2.1.8

Determinați n știind că $1+2+3+\ldots+n=5050$.

Rezolvare:
Metoda 1: Pentru clasele 5-7
$n(n+1)=10100$

CUMPĂRĂTOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237

2.3 Aplicații practice

Exercițiul 2.3.1

La o petrecere cu 50 de persoane, fiecare persoană îi strânge mâna fiecărei alte persoane. Câte strângeri de mână au loc?

Rezolvare:
Prima persoană dă 49 de strângeri de mână, a doua 48 (deoarece deja a dat mâna cu prima), etc.

$$\begin{aligned} S &= 49 + 48 + 47 + \ldots + 1 \\ &= \frac{49 \times 50}{2} = 49 \times 25 = 1225 \end{aligned}$$

Exercițiul 2.3.2

Calculați numărul de diagonale ale unui poligon convex cu 100 de laturi.

Rezolvare: metoda 1 - cu suma lui Gauss

- Un poligon convex cu n laturi are n vârfuri.
- Pentru a calcula numărul total de segmente care unesc vârfurile, folosim suma lui Gauss:

$$\begin{aligned} \text{Număr total segmente} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\ &= \frac{(n-1) \times n}{2} \end{aligned}$$

- Scădem numărul de laturi (deorece laturile nu sunt diagonale) și obținem:

$$\text{Număr diagonale} = \frac{(n-1) \times n}{2} - n$$

Aplicăm pentru $n = 100$:

$$\begin{aligned} \text{Număr total segmente} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 \\ &= \frac{99 \times 100}{2} = 4950 \\ \text{Număr diagonale} &= 4950 - 100 = 4850 \end{aligned}$$

Explicație pas cu pas:

1. Primul vârf se leagă cu celelalte 99 de vârfuri → 99 segmente

Pasul 4: Calculăm D

$$D = 50 \times 5050 = 252500$$

Răspuns: $D = 252500$

Observație: Frumusețea acestui exercițiu constă în faptul că, aplicând diferența de pătrate la început, am transformat o expresie aparent complexă într-un calcul simplu. Am folosit doar suma lui Gauss și proprietăți de bază ale numerelor.

Exercițiul 2.4.4

Calculați suma:

$$S = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+100}$$

Rezolvare:

Pasul 1: Scriem termenul general folosind suma lui Gauss

Fiecare numitor este o sumă Gauss:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Deci termenul general este:

$$a_k = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)}$$

Pentru k de la 2 la 100.

Pasul 2: Rescriem suma

$$S = \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{4 \times 5} + \ldots + \frac{2}{100 \times 101}$$

Pasul 3: Descompunem fiecare fracție

Observăm că:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

CUMPARATOR: Vasilescu Ionel | TEL: 0501111111 | clubcarte@bestpublishing.ro | COMANDA #237