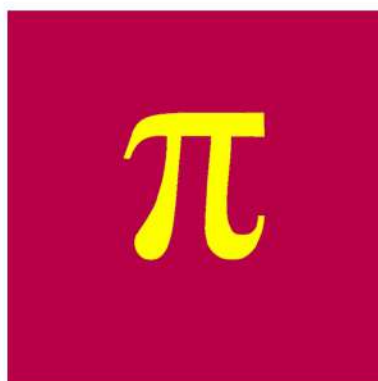


MXM School & Publishing Ltd.

MULTIMI

Ediția I

Autor: Cristian MURICA



- *Noțiuni de bază despre mulțimi*
- *Relații între mulțimi*
- *Operații cu mulțimi*
- *Cardinalul operațiilor cu mulțimi finite*
- *Mulțimi numerice fundamentale*

București
27 decembrie 2025

Drepturi de autor

Cristian MURICA

Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată într-un sistem de recuperare sau transmisă sub orice formă sau prin orice mijloc, electronic, mecanic, prin fotocopiere, înregistrare sau altfel, fără permisiunea prealabilă scrisă a editorului, cu excepția situațiilor permise prin lege.

ISBN: 978-973-738-563-5

Prima ediție: 27 decembrie 2025

Date editoriale și contact:

Editura: MXM School & Publishing Ltd.

Adresă: strada Vintilă Mihăilescu nr. 14, sector 6, București

www.scoaladematematica.eu

WhatsApp: 0762.469.119.

Email: office@scoaladematematica.eu

YouTube: @scoaladematematica1235

Facebook: <https://www.facebook.com/scoaladematematica>

Cuprins

Noțiuni de bază despre mulțimi	5
Definiția mulțimii	5
Exemple de mulțimi cu elemente de natură diferită	5
Reguli importante în scrierea mulțimilor	6
Apartenența și neapartenența	6
Mulțimea vidă	6
Moduri de descriere a unei mulțimi	7
Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și infinite	9
Cardinalul unei mulțimi	9
Mulțimi finite și mulțimi infinite	9
Relații între mulțimi	10
Egalitatea a două mulțimi	10
Definiția incluziunii	11
Submulțimi	11
Mulțimea submulțimilor (Mulțimea părților)	14
Definiție și notație	14
Proprietăți importante	14
Exemplu detaliat: Mulțimea cu 3 elemente	14
Reprezentare schematică	15
Submulțimi proprii și submulțimi improprii	15
Diagrame Venn-Euler pentru relații între mulțimi	16
Operații cu mulțimi	18
Reuniunea mulțimilor	18
Intersecția mulțimilor	19
Diferența a două mulțimi	20
Diferența simetrică a două mulțimi	22
Produsul cartezian a două mulțimi	24
Complementara unei mulțimi	25
Cardinalul operațiilor cu mulțimi finite	27
Cardinalul intersecției a două mulțimi	27
Cardinalul reuniunii a două mulțimi	27
Cardinalul diferenței a două mulțimi	28
Cardinalul diferenței simetrice	28
Cardinalul produsului cartezian	28
Cardinalul complementarei	29
Aplicații practice	29
Mulțimile numerice fundamentale	31

Mulțimea numerelor naturale	31
Mulțimea numerelor întregi	31
Mulțimea numerelor raționale	31
Mulțimea numerelor iraționale	32
Mulțimea numerelor reale	33
Exerciții rezolvate tipice	36
Exerciții cu mulțimi definite explicit	36
Exerciții cu operații cu mulțimi	36
Exerciții cu cardinalul mulțimilor	37
Exerciții cu mulțimile numerice	37
Ce trebuie să reții	39
Definiții fundamentale	39
Moduri de descriere a unei mulțimi	40
Cardinalul și mulțimea submulțimilor	40
Operații cu mulțimi	40
Proprietăți ale operațiilor	40
Cardinalul operațiilor (pentru mulțimi finite)	41
Mulțimile numerice fundamentale	42
Atenție la greșeli frecvente	42
Exemple rapide de recapitulare	43

6. Mulțimi de obiecte concrete:

$$M_6 = \{\text{Dacia, Ford, Volkswagen, Toyota}\}$$

Această mulțime conține diferite mărci de mașini.

7. Mulțimi de culori:

$$M_7 = \{\text{roșu, albastru, galben, verde}\}$$

Această mulțime conține nume de culori.

Observație: În toate exemplele, elementele sunt bine determinate și **distincte**, iar ordinea lor nu este relevantă pentru definirea mulțimii.

Reguli importante în scrierea mulțimilor

La scrierea unei mulțimi, trebuie respectate două reguli fundamentale:

1. **ELEMENTELE SUNT DISTINCTE (UNICE):** Un element nu poate apărea de două ori într-o mulțime. Dacă un element apare de mai multe ori în descriere, el se scrie o singură dată în scrierea mulțimii.

Exemplu: Mulțimea literelor din cuvântul "banana" este $\{b, a, n\}$, nu $\{b, a, n, a, n, a\}$.

2. **ORDINEA ELEMENTELOR NU CONTEAZĂ:** Schimbarea ordinii elementelor nu modifică mulțimea.

Exemplu: $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$ și $\{2, 3, 1\}$ reprezintă aceeași mulțime.

Apartenența și neapartenența

- Dacă un obiect x este element al mulțimii A , spunem că x **aparține mulțimii** A și scriem:

$$x \in A$$

- Dacă un obiect y nu este element al mulțimii A , spunem că y **nu aparține mulțimii** A și scriem:

$$y \notin A$$

- Simbolurile $\in$ și $\notin$ se numesc **simboluri de apartenență**.

Mulțimea vidă

- **Mulțimea vidă** este mulțimea care nu are niciun element.
- Se notează cu $\emptyset$ sau cu $\{\}$.

$$\emptyset = \{\}$$

- **Atenție!** Mulțimea $\{0\}$ nu este mulțimea vidă, deoarece conține un element (numărul zero).

Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și infinite

Cardinalul unei mulțimi

- **Cardinalul** unei mulțimi reprezintă numărul de elemente ale acelei mulțimi.
- Cardinalul mulțimii A se notează cu $|A|$ sau cu $\text{card } A$.
- Pentru mulțimea vidă, cardinalul este 0: $|\emptyset| = 0$.

Exemple:

1. Pentru mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$, avem $\text{card } A = 4$.
2. Pentru mulțimea $B = \{a, e, i, o, u\}$, avem $|B| = 5$.
3. Pentru mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 = 9$, adică $S = \{-3, 3\}$, avem $|S| = 2$.
4. Pentru mulțimea vidă, $|\emptyset| = 0$.

Mulțimi finite și mulțimi infinite

- O mulțime se numește **finită** dacă are un număr finit de elemente, adică dacă putem enumera toate elementele sale și numărul acestora este un număr natural.
- O mulțime se numește **infinită** dacă nu este finită, adică are o infinitate de elemente (nu putem scrie toate elementele sale într-o listă care să se termine).

Exemple de mulțimi finite:

- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ are 5 elemente.
- Mulțimea elevilor din clasa voastră.
- Mulțimea literelor alfabetului românesc (are 31 de elemente).

Exemple de mulțimi infinite:

- Mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Mulțimea punctelor de pe o dreaptă.

Observație: Mulțimea vidă $\emptyset$ este o mulțime finită, cu cardinalul egal cu 0 (zero).

Proprietăți fundamentale ale relației de incluziune:

Pentru orice mulțime M , sunt adevărate următoarele afirmații:

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.

Formal scriem: $\emptyset \subseteq M$ pentru orice mulțime M .

Explicație: Definiția unei submulțimi spune că „ A este submulțime a lui B dacă orice element al lui A este și element al lui B .” Pentru mulțimea vidă, care nu are niciun element, această condiție este îndeplinită în mod automat. Nu există niciun element în $\emptyset$ care să nu fie și în M .

Exemplu: Fie $M = \{1, 2, 3\}$. Atunci $\emptyset \subseteq M$. Chiar dacă M conține elemente și mulțimea vidă nu conține niciun element, mulțimea vidă este întotdeauna submulțime a sa.

2. Orice mulțime este submulțime a ei însăși.

Formal scriem: $M \subseteq M$ pentru orice mulțime M .

Explicație: Conform definiției, toate elementele lui M sunt, evident, elemente ale lui M . Aceasta este o proprietate de reflexivitate a relației de incluziune.

Exemplu: Pentru $M = \{a, b, c\}$, avem $M \subseteq M$. Fiecare element a , b și c aparține lui M .

Consecințe și observații importante:

- Aceste două proprietăți arată că pentru orice mulțime M există întotdeauna cel puțin două submulțimi: mulțimea vidă $\emptyset$ și însăși mulțimea M .
- Ele sunt adevărate indiferent de natura elementelor lui M și chiar dacă M este vidă.
- Pentru mulțimea vidă $\emptyset$, avem $\emptyset \subseteq \emptyset$ (este adevărată atât prima cât și a doua proprietate).
- Aceste proprietăți definesc cele două **submulțimi improprii** ale oricărei mulțimi.

Atenție la o confuzie frecventă: Deși $\emptyset \subseteq M$ este adevărat pentru orice M , nu trebuie confundat cu apartenența. De exemplu, pentru $M = \{1, 2, 3\}$, avem:

- $\emptyset \subseteq M$ (Adevărat: mulțimea vidă este submulțime a lui M)
- $\emptyset \in M$ (Fals: mulțimea vidă nu este un element al lui M)

În mod similar, $M \subseteq M$ este adevărat, dar acest lucru nu înseamnă că M este element al lui M .

Atenție la diferența dintre apartenență și incluziune:

- **Apartenența** (simbolul $\in$) este o relație între **un element** și **o mulțime**. Exprimă faptul că un obiect este un membru al unei mulțimi. De exemplu: $a \in \{a, b, c\}$.
- **Incluziunea** (simbolul $\subseteq$ sau $\subset$) este o relație între **două mulțimi**. Exprimă faptul că mulțimea A este inclusă în mulțimea B , adică exprimă faptul că toate elementele mulțimii A sunt și elementele altei mulțimii B .
De exemplu: $A = \{a, b\}$ și $B = \{a, b, c\}$, atunci $A \subseteq B$.

Produsul cartezian a două mulțimi

Definiție: Fie A și B două mulțimi. **Produsul cartezian** al mulțimilor A și B este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) , unde primul element a aparține mulțimii A , iar al doilea element b aparține mulțimii B .

- **Notatie:** $A \times B$ (citim „A ori B” sau „produsul cartezian dintre A și B”).
- **Definiție formală:** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.
- **Elemente:** Perechi ordonate (a, b) , unde ordinea contează: $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
- **Cardinal:** Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Exemple:

1. Fie $A = \{1, 2\}$ și $B = \{x, y\}$. Atunci:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

Observați că $|A| = 2$, $|B| = 2$, iar $|A \times B| = 4$.

2. Fie $A = \{a, b\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. Atunci:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

3. Produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (notat $\mathbb{R}^2$) reprezintă mulțimea tuturor punctelor dintr-un plan.

Observații importante:

- **Ordinea contează:** În general, $A \times B \neq B \times A$. De exemplu, pentru $A = \{1, 2\}$ și $B = \{x, y\}$:

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\} \neq A \times B$$
- **Produsul cartezian cu mulțimea vidă:** Pentru orice mulțime A , avem $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
- **Reprezentare geometrică:** Dacă A și B sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, atunci $A \times B$ poate fi reprezentat ca o rețea de puncte în planul cartezian.
- **Produsul cartezian a trei mulțimi:** Se definește similar:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

iar cardinalul este $|A| \cdot |B| \cdot |C|$ (pentru mulțimi finite).

Atenție!

- Elementele produsului cartezian sunt **perechi ordonate**, nu mulțimi.

Cardinalul diferenței a două mulțimi

Pentru două mulțimi finite A și B , cardinalul diferenței $A \setminus B$ se poate calcula astfel:

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Explicație: Elementele lui A care nu sunt în B sunt exact elementele lui A minus cele comune cu B .

Exemplu: Pentru $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$:

$$|A \setminus B| = 4 - 2 = 2$$

Verificare: $A \setminus B = \{1, 2\}$ are 2 elemente.

Observație: Această formulă reflectă exact definiția diferenței: elementele lui A care nu sunt în B se obțin scăzând din totalul elementelor lui A pe cele care sunt și în B (adică intersecția). De remarcat că pentru a calcula $|A \setminus B|$ nu este necesar să cunoaștem cardinalul reuniunii $|A \cup B|$, ci doar pe cel al intersecției.

Cardinalul diferenței simetrice

Pentru două mulțimi finite A și B , pentru calculul cardinalului diferenței simetrice $A \Delta B$ avem două relații:

$$|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|$$

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Explicație: Diferența simetrică conține toate elementele din reuniune, mai puțin cele din intersecție.

Exemplu: Pentru aceleași mulțimi:

$$|A \Delta B| = 7 - 2 = 5 \quad \text{sau} \quad |A \Delta B| = 4 + 5 - 2 \times 2 = 5$$

Verificare: $A \Delta B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ are 5 elemente.

Cardinalul produsului cartezian

Pentru două mulțimi finite A și B , cardinalul produsului lor cartezian este egal cu produsul cardinalilor celor două mulțimi:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Explicație: Pentru fiecare element $a \in A$ avem $|B|$ posibilități de a forma o pereche ordonată (a, b) cu un element $b \in B$. Deci, numărul total de perechi este $|A|$ înmulțit cu $|B|$.

- a) $M \cup N = \{a, b, c, d, e, f\}$
- b) $M \cap N = \{c, d\}$
- c) $M \setminus N = \{a, b\}$
- d) Mai întâi: $N \setminus P = \{c, e\}$ și $P \setminus N = \{b, h\}$. Atunci $N \Delta P = (N \setminus P) \cup (P \setminus N) = \{c, e, b, h\}$.
(Ordinea nu contează.)

Exerciții cu cardinalul mulțimilor

4. Într-o clasă, 18 elevi practică fotbal, 15 practică baschet, iar 6 practică ambele sporturi.

- a) Câți elevi practică cel puțin un sport?
- b) Câți elevi practică doar fotbal?

Rezolvare: Fie F = mulțimea elevilor care practică fotbal, B = cea a celor care practică baschet. Date: $|F| = 18$, $|B| = 15$, $|F \cap B| = 6$.

- a) $|F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B| = 18 + 15 - 6 = 27$.
- b) $|F \setminus B| = |F| - |F \cap B| = 18 - 6 = 12$.

Răspuns: 27 de elevi practică cel puțin un sport; 12 elevi practică doar fotbal.

Exerciții cu mulțimile numerice

5. Precizați căreia sau căror mulțimi numerice ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) aparține fiecare dintre numerele:

- a) 0
- b) -5
- c) $\frac{2}{3}$
- d) $\sqrt{4}$
- e) $\sqrt{5}$
- f) 0,121212... (periodic)

Rezolvare:

- a) $0 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (în definiția cu 0 inclus)